c)

$$i.z^3=(-i-z)^3 \Leftrightarrow -i.(\bar{z})^3=(i-\bar{z})^3 \Leftrightarrow \left(\frac{i.\bar{z}}{i-z}\right)^3=1 \Leftrightarrow (z')^3=1 \Leftrightarrow z'=1 \text{ ou } z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ ou } z'=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bullet\ z'=1 \Leftrightarrow z'=e^{i.0} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}(-1+i)=\frac{1}{2}(1-i)$$

$$\bullet\ z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$$

$$\bullet\ z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$$

Conclusion : les solutions sont : $z_1=\frac{1}{2}(1-i)$ $z_2=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$ *et* $z_3=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$

EX 35 : $a\in IR$; $(E): z^2+a(1-i)z-ia^2=0$

1)

$\Delta=a^2(1-i)^2+4ia^2=-2ia^2+4ia^2=2ia^2 \Rightarrow \quad \delta=(1+i)a$

Les solutions sont : $z_1=\frac{-a(1-i)-(1+i)a}{2}=-a$ *et* $z_2=\frac{-a(1-i)+(a+i)a}{2}=ia$

2)

a) $z_A=2+z_1=2-a$ *et* $z_B=z_2=ia$

ACBD carré de sens direct d'où :

$$\begin{cases} CA=CB \\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_A-z_C|=|z_B-z_C| \\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=1 \\ Arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$\Leftrightarrow z_A-z_C=iz_B-iz_C \Leftrightarrow (1-i)z_C=z_A-iz_B \Leftrightarrow (1-i)z_C=2-a+a \Leftrightarrow (1-i)z_C=2 \Leftrightarrow z_C=\frac{2}{1-i}$

$\Leftrightarrow \boxed{z_C=1+i}$ Donc C est un point fixe.

b) Soit L l'ensemble des points D lorsque a varie dans IR

ACBD est un carré $\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} \Rightarrow z_D-z_C=z_A-z_C+z_B-z_C$

$\Rightarrow z_D=z_A+z_B-z_C \Rightarrow z_D=(1-a)(1-i)$

Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $1-i$; $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $aff\left(\overrightarrow{OD}\right)=(1-a).aff\,\vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(1-a)\vec{w}$

D appartient à la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ (Δ :y=-x)

Donc $L\subset\Delta$ (1)

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn